Seat No. : _____

ZD-120

May-2014

B.Sc., (Sem.-II)

MAT-103 : Mathematics
(Differential Equations & Geometry)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) તમામ પાંચ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

Instructions : **All** the **five** questions are compulsory.

(2) દરેક પ્રશ્નના ગુણ **14** છે.

Each question is of **14** marks.

(3) સંકેતો પ્રચલિત છે.

Symbols are usual

(4) જમણી બાજુના અંક જે-તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નનો પૂરો ગુણભાર દર્શાવે છે.

Figure to the right indicate full marks of the question/sub-question.

1. (a) ક્લેરોટના વિકલ સમીકરણ ઉકેલવાની રીત સમજાવો. $2P + P^2 = \log(y - xP)$ નો ઉકેલ પણ મેળવો. **7**

Explain the method to solve Clairout Differential equation.

Also Solve $2P + P^2 = \log(y - xP)$

અથવા/OR

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$નાં ઉકેલની રીત સમજાવો. જ્યાં P અને Q એ x નાં વિધેયો છે. $x\frac{dy}{dx} + y = x^3 y^4$ નો ઉકેલ પણ મેળવો.

Explain the method to solve a differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, where P and Q are functions of x. Also solve $x\frac{dy}{dx} + y = x^3 y^4$.

(b) સમીકરણ ઉકેલો : **7**

Solve the equations :

(1) $(x + y + 5)dx + (x - y^2 + 2)dy = 0$

(2) $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$

અથવા/OR

સમીકરણ ઉકેલો :

Solve the equations :

(1) $xyP^3 + (2y^2 - 3x^2)P^2 - 6xyP = 0$

(2) $y^2P^2 - x^2 = 0$ જ્યાં / where $P = \frac{dy}{dx}$

2. (a) જો $f(a) = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax} x^r}{r! \cdot f(a)}$ જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$ $\frac{e^{3x}}{(D+1)(D-3)^2}$ નું સાદુરૂપ આપો. 7

If $f(a) = 0$ then prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax} x^r}{r! \cdot f(a)}$ where $D = \frac{d}{dx}$. Also simplify $\frac{e^{3x}}{(D+1)(D-3)^2}$

અથવા/OR

જો $f(-a^2) \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax. \frac{\sin 3x}{D^2 + 2D + 1}$ નું સાદું રૂપ આપો.

If $f(-a^2) \neq 0$, then prove that $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax$. Also simplify $\frac{\sin 3x}{D^2 + 2D + 1}$.

(b) સમીકરણ ઉકેલો : 7

Solve the equations :

(1) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

(2) $(D^2 - 1)y = x^2 \cos x$

અથવા/OR

સમીકરણ ઉકેલો :

Solve the equations :

(1) $(D^4 - 5D^3 + 17D^2 - 13D)y = 0$

(2) $(D^2 + 4)y = 10 \sin 3x - 9 \cos 3x$

3. (a) R^3ના બે ભિન્ન ગોલકો પરસ્પર લંબચ્છેદીય હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત મેળવો. 7

Obtain the necessary and sufficient condition for two different spheres in R^3 are orthogonal.

અથવા/OR

R^3માં સમતલ $lx + my + nz = P$ એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત અને સ્પર્શબિંદુનાં યામ મેળવો.

Find the condition that the plane in R^3 $lx + my + nz = P$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and also find the co-ordinates of the point of contact.

(b) R^3ના બે ભિન્ન ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 12 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 2K(x - y + z) + 10 = 0$ પરસ્પર લંબચ્છેદીય હોય તો K શોધો. 7

Find K if spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 12 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 2K(x - y + z) + 10 = 0$ in R^3 are orthogonal to each other.

અથવા/OR

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 70 = 0, x + 5y - 72 = 45$ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

Find the radius and centre of circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 70 = 0, x + 5y - 72 = 45$.

4. (a) પ્રચલિત સંકેતમાં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ મેળવો. 7

In usual notation obtain the polar equation of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

અથવા/OR

જેનો અક્ષ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ અને ત્રિજ્યા 3 એકમ હોય તેવાં સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

Find the equation of the right cylinder having radius 3 and axis $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$.

(b) જો R^3ના બિંદુ Aનાં કાર્તિઝીય-યામ (3, 4, 12) હોય, તો તેના નળાકારીય અને ગોલીય યામ મેળવો. 7

If the Cartesian co-ordinates of point A are (3, 4, 12) in R^3, find its cylindrical and spherical co-ordinates.

અથવા/OR

શાંકવની નાભિજીવાઓ $\overline{SP}$ અને $\overline{SP'}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} =$ અચળ.

If $\overline{SP}$ and $\overline{SP'}$ are focal chords of a conics then prove that $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} =$ constant.

5. નીચેનાં ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે **સાત**) **14**

Give the answer in short : (any **seven**)

(1) જેનો સામાન્ય ઉકેલ $y = A\cos x + B\sin x$ હોય તેવું વિકલ સમીકરણ લખો.

Find a differential equation whose general solution is $y = A\cos x + B\sin x$.

(2) વિકલ સમીકરણ $(D^2 + 4)y = 0$નો સામાન્ય ઉકેલ મેળવો.

Write a general solution of differential equation $(D^2 + 4)y = 0$

(3) વિકલ સમીકરણ $y = xP + P^3 + \log P + \sin P$ નો સામાન્ય ઉકેલ મેળવો.

Write a general solution of differential equation $y = xP + P^3 + \log P + \sin P$.

(4) દ્વિપૃષ્ઠીય અતિવલયજનું વ્યાપક સમીકરણ લખો.

Write a general equation of hyperboloid of two sheets.

(5) $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$ ઉકેલો.

Solve $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$

(6) ધ્રુવીય સમીકરણ $15 - 3r = r\cos\theta$ કયો વક્ર દર્શાવે છે ?

Which curve is represented by the polar equation $15 - 3r = r\cos\theta$.

(7) r_1 અને r_2 ત્રિજ્યા તેમજ c_1 અને c_2 કેન્દ્રવાળા બે ગોલકો પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે તે માટેની શરત કઈ છે ?

If r_1 and r_2 are radii of two spheres with centres c_1 and c_2 under which condition spheres are intersect externally ?

(8) વર્તુળ $r^2 - 4r\cos(\theta - \pi/4) - 5 = 0$ નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

Find the radius and centre of circle $r^2 - 4r\cos(\theta - \pi/4) - 5 = 0$.

(9) શાંકવ $-4r\cos\theta = r - 12$ ની ઉત્કેન્દ્રતા શોધો.

Find eccentricity of the conic $-4r\cos\theta = r - 12$.